

נגזרת פונקציית המנה $\frac{f(x)}{g(x)}$

דף עבודה- שאלון 471

בדף הנוסחאות בבחינת הבגרות מופיעים 3 כללי גזירה שכדאי להכיר:

א. כלל גזירה בעזרתו ניתן לגזור כל פונקציית מנה: $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$

ב. כלל גזירה של פונקציית מנה מהצורה $y = \frac{a \text{ (מספר)}}{x}$: $\left(\frac{a}{x}\right)' = -\frac{a}{x^2}$

ג. כלל גזירה של פונקציית מנה מהצורה $y = \frac{1}{f(x)}$: $\left(\frac{1}{f(x)}\right)' = -\frac{f'(x)}{(f(x))^2}$

כלל הגזירה	הפונקציה		כלל הגזירה	הפונקציה		כלל הגזירה	הפונקציה	
	$f(x) = \frac{-x-7}{x}$	(19)		$f(x) = \frac{6-x}{x}$	(10)		$f(x) = \frac{5x}{2x+1}$	(1)
	$f(x) = \frac{7x^2}{7x+1}$	(20)		$f(x) = \frac{6x^2}{x+1}$	(11)		$f(x) = \frac{5}{x}$	(2)
	$f(x) = \frac{7-x^2}{x^2+7}$	(21)		$f(x) = \frac{4}{6x} + \frac{3}{6x^2}$	(12)		$f(x) = \frac{x^2}{x-5}$	(3)
	$f(x) = \frac{7x}{x^2+7}$	(22)		$f(x) = \frac{6}{x}$	(13)		$f(x) = \frac{1}{x^2-5x}$	(4)
	$f(x) = \frac{7}{x^2}$	(23)		$f(x) = \frac{6x+2}{x^2}$	(14)		$f(x) = \frac{2x}{x^2-5x}$	(5)
	$f(x) = \frac{1}{7x+7}$	(24)		$f(x) = \frac{x+6}{x+1}$	(15)		$f(x) = \frac{1}{5-x}$	(6)
	$f(x) = \frac{7}{x}$	(25)		$f(x) = \frac{6x^2+6}{x+6}$	(16)		$f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}$	(7)
	$f(x) = \frac{7x^2}{x+1}$	(26)		$f(x) = \frac{1}{6x+1}$	(17)		$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2-5}$	(8)
	$f(x) = \frac{x+7}{x-7}$	(27)		$f(x) = \frac{6x^2}{6x^2+1}$	(18)		$f(x) = \frac{x+5}{x^2+5}$	(9)

(1) מיינו את הפונקציות לפני כללי הגזירה המתאימים להם מלמעלה.

(2) גזרו את הפונקציות משאלה 1 לפי כלל הגזירה הנוח לכם.
אם ניתן להשתמש ביותר מכלל גזירה אחד – מומלץ לגזור בדרכים שונות לשם התרגול.

תשובות מפורטות:

לפניכם תשובות מלאות ל-9 הנגזרות הראשונות. פתרונות מלאים נוספים תוכלו לראות

לאחר שתתחברו לחשבון GOOL שלכם, ותצפו בסרטון הזה .



(1) להלן טבלה עם כללי הגזירה:

כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה	כלל הגזירה	הפונקציה
א'	$f(x) = \frac{-x-7}{x}$	(19)	א'	$f(x) = \frac{6-x}{x}$	(10)
א'	$f(x) = \frac{7x^2}{7x+1}$	(20)	א'	$f(x) = \frac{6x^2}{x+1}$	(11)
א'	$f(x) = \frac{7-x^2}{x^2+7}$	(21)	א'	$f(x) = \frac{4}{6x} + \frac{3}{6x^2}$	(12)
א'	$f(x) = \frac{7x}{x^2+7}$	(22)	א', ב'	$f(x) = \frac{6}{x}$	(13)
א'	$f(x) = \frac{7}{x^2}$	(23)	א'	$f(x) = \frac{6x+2}{x^2}$	(14)
א', ג'	$f(x) = \frac{1}{7x+7}$	(24)	א'	$f(x) = \frac{x+6}{x+1}$	(15)
א', ב'	$f(x) = \frac{7}{x}$	(25)	א'	$f(x) = \frac{6x^2+6}{x+6}$	(16)
א'	$f(x) = \frac{7x^2}{x+1}$	(26)	א', ג'	$f(x) = \frac{1}{6x+1}$	(17)
א'	$f(x) = \frac{x+7}{x-7}$	(27)	א'	$f(x) = \frac{6x^2}{6x^2+1}$	(18)

(2) להלן הנגזרות המפורטות לפונקציות (1)-(9):

$$(1) \text{ הפונקציה: } f(x) = \frac{5x}{2x+1} \text{ הנגזרת: } f'(x) = \frac{5 \cdot (2x+1) - 5x \cdot 2}{(2x+1)^2} = \frac{10x+5-10x}{(2x+1)^2} = \frac{5}{(2x+1)^2}$$

$$(2) \text{ הפונקציה: } f(x) = \frac{5}{x} \text{ הנגזרת (לפי כלל גזירה א): } f'(x) = \frac{0 \cdot x - 5 \cdot 1}{x^2} = -\frac{5}{x^2}$$

$$\text{הנגזרת (לפי כלל גזירה ב): } f'(x) = -\frac{5}{x^2}$$

$$(3) \text{ הפונקציה: } f(x) = \frac{x^2}{x-5} \text{ הנגזרת: } f'(x) = \frac{2x \cdot (x-5) - x^2 \cdot 1}{(x-5)^2} = \frac{2x^2 - 10x - x^2}{(x-5)^2} = \frac{x^2 - 10x}{(x-5)^2}$$

(4) הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^2-5x}$

הנגזרת (לפי כלל גזירה א'): $f'(x) = \frac{0 \cdot (x^2-5x) - 1 \cdot (2x-5)}{(x^2-5x)^2} = \frac{-2x+5}{(x^2-5x)^2}$

במונה נכתוב את הנגזרת של המכנה במינוס.
ובמכנה - את המכנה המקורי בריבוע.

הנגזרת (לפי כלל גזירה ג'): $f'(x) = \frac{-2x+5}{(x^2-5x)^2}$

(5) הפונקציה: $f(x) = \frac{2x}{x^2-5x}$ הנגזרת (לפי כלל גזירה א'):

$f'(x) = \frac{2 \cdot (x^2-5x) - 2x \cdot (2x-5)}{(x^2-5x)^2} = \frac{2x^2-10x-4x^2+10x}{(x^2-5x)^2} = \frac{-2x^2}{(x^2-5x)^2}$

(6) הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{5-x}$ הנגזרת (לפי כלל גזירה א'): $f'(x) = \frac{0 \cdot (5-x) - 1 \cdot (-1)}{(5-x)^2} = \frac{1}{(5-x)^2}$

במונה נכתוב את הנגזרת של המכנה במינוס.
ובמכנה - את המכנה המקורי בריבוע.

הנגזרת (לפי כלל גזירה ג'): $f'(x) = \frac{1}{(5-x)^2}$

(7) הפונקציה: $f(x) = \frac{1}{x^2} + \frac{5}{x}$

הנגזרת (לפי כלל גזירה א'): נגזור כל שבר בנפרד - $f'(x) = \frac{0 \cdot x^2 - 1 \cdot 2x}{(x^2)^2} + \frac{0 \cdot x - 5 \cdot 1}{x^2} = \frac{-2x}{x^4} + \frac{-5}{x^2}$

את השבר הראשון נגזור לפי כלל גזירה ג': במונה נכתוב את הנגזרת של המכנה במינוס. ובמכנה - את המכנה המקורי בריבוע. את השבר השני נגזור לפי כלל גזירה ב'.

הנגזרת (לפי כללי גזירה ב' וג'): $f'(x) = \frac{-2x}{x^4} + \frac{-5}{x^2}$

הערה- ניתן גם לעשות מכנה משותף לאחר מכן לגזור לפי כלל גזירה א'.

(8) הפונקציה: $f(x) = \frac{x^2+5}{x^2-5}$ הנגזרת (לפי כלל גזירה א'):

$f'(x) = \frac{2x \cdot (x^2-5) - (x^2+5) \cdot 2x}{(x^2-5)^2} = \frac{2x \cdot (x^2-5) - 2x \cdot (x^2+5)}{(x^2-5)^2} = \frac{2x^3-10x-2x^3-10x}{(x^2-5)^2} = \frac{-20x}{(x^2-5)^2}$

כדי להימנע מטעויות, נשתמש בחוק החילוף
ונעביר את ה- $2x$ "קדימה"

(9) הפונקציה: $f(x) = \frac{x+5}{x^2+5}$ הנגזרת (לפי כלל גזירה א'):

$f'(x) = \frac{1 \cdot (x^2+5) - (x+5) \cdot 2x}{(x^2+5)^2} = \frac{1 \cdot (x^2+5) - 2x \cdot (x+5)}{(x^2+5)^2} = \frac{x^2+5-2x^2-10x}{(x^2+5)^2} = \frac{-x^2-10x+5}{(x^2+5)^2}$

כדי להימנע מטעויות, נשתמש בחוק החילוף
ונעביר את ה- $2x$ "קדימה"

להלן הנגזרות הסופיות של פונקציות (10)-(27):

$f'(x) = \frac{-7x^2 + 49}{(x^2 + 7)^2}$	(22)	$f'(x) = \frac{6x^2 + 72x - 6}{(x + 6)^2}$	(16)	$f'(x) = \frac{-6}{x^2}$	(10)
$f'(x) = \frac{-14x}{x^4}$	(23)	$f'(x) = \frac{-6}{(6x + 1)^2}$	(17)	$f'(x) = \frac{6x^2 + 12x}{(x + 1)^2}$	(11)
$f'(x) = \frac{-7}{(7x + 7)^2}$	(24)	$f'(x) = \frac{12x}{(6x^2 + 1)^2}$	(18)	$f'(x) = \frac{-24x^2 - 36x}{(6x^2)^2}$	(12)
$f'(x) = \frac{7}{x^2}$	(25)	$f'(x) = \frac{7}{x^2}$	(19)	$f'(x) = \frac{6}{x^2}$	(13)
$f'(x) = \frac{-49x^2 + 14x}{(1 - 7x)^2}$	(26)	$f'(x) = \frac{49x^2 + 14x}{(7x + 1)^2}$	(20)	$f'(x) = \frac{-6x^2 - 4x}{x^4}$	(14)
$f'(x) = \frac{-14}{(x - 7)^2}$	(27)	$f'(x) = \frac{-28x}{(x^2 + 7)^2}$	(21)	$f'(x) = \frac{-5}{(x + 1)^2}$	(15)